Πατήστε στο σύνδεσμο για να μεταβείτε στο κριτήριο:

https://forms.gle/hENCiS1hn8tu7FEC6

Λύσεις στην επόμενη σελίδα

1. Το μήκος του τόξου είναι $\ell=\frac{\pi\rho\mu}{180^\circ}=\frac{\pi\cdot 2\cdot 90^\circ}{180^\circ}=\pi$.

2. Το ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ έχει κάθετες πλευρές τις ΑΒ και ΑΓ και υποτείνουσα τη ΒΓ, που είναι διάμετρος του κύκλου. Για τη διάμετρο ΒΓ ισχύει ότι ΒΓ = 2ρ = 10 .
Εφαρμόζοντας το Πυθαγόρειο Θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ έχουμε:
$\text{ΒΓ}^2=\text{ΑΒ}^2+\text{ΑΓ}^2 \Leftrightarrow \text{ΑΓ}^2=\text{ΒΓ}^2-\text{ΑΒ}^2=100-36=64 \Leftrightarrow \text{ΑΓ}=8$.
$(\text{ΑΒΓ})=\frac{1}{2}\text{ΑΒ}\cdot\text{ΑΓ}=\frac{1}{2}\cdot 6\cdot 8=24$.

3. Γνωρίζουμε ότι η εφαπτομένη του κύκλου σε κάθε σημείο του είναι κάθετη στην ακτίνα που καταλήγει στο σημείο επαφής, οπότε ΒΑ⊥ΟΑ. Άρα, η γωνία $\widehat{\text{ΟΑΒ}}$ είναι ορθή.
Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΟΑΒ η κάθετη πλευρά ΟΑ ισούται με το μισό της υποτείνουσας ΟΒ, οπότε η απέναντι γωνία της $\widehat{\text{ΟΒΑ}}$ ισούται με 30^o.
Με εφαρμογή του Πυθαγόρειου θεωρήματος στο ορθογώνιο τρίγωνο ΟΑΒ έχουμε:
$\text{ΑΒ}^2=\text{ΟΒ}^2-\text{ΟΑ}^2=2^2-1^2=4-1=3 \Leftrightarrow \text{ΑΒ}=\sqrt{3}$.
γ) Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΟΑΒ είναι $\widehat{\text{ΑΟΒ}}=90^\circ-30^\circ=60^\circ$, οπότε
$\ell_{\text{ΑΓ}}=\frac{\pi R\mu}{180^\circ}=\frac{\pi\cdot R\cdot 60^\circ}{180^\circ}=\frac{\pi}{3}$.
Η περίμετρος του γραμμοσκιασμένου μικτόγραμμου χωρίου ΑΒΓ είναι:
$\Pi=\text{ΑΒ}+\text{ΒΓ}+\ell_{\text{ΑΓ}}=\sqrt{3}+1+\frac{\pi}{3}$.

4. Τα τόξα ΘΕ, ΕΖ, ΖΗ, ΗΘ είναι τόξα ίσων κύκλων ακτίνας ρ = 2 και αντιστοιχούν σε ίσες επίκεντρες γωνίες 90^o. Επομένως, οι κυκλικοί τομείς Α.ΘΕ, Β.ΕΖ, Γ.ΖΗ, Δ.ΗΘ έχουν καθένας εμβαδόν ίσο με
$(\text{Α.ΘΕ})=(\text{Β.ΕΖ})=(\text{Γ.ΖΗ})=(\text{Δ.ΗΘ})=\frac{\pi\rho^2\cdot 90^\circ}{360^\circ}=\frac{\pi\cdot 2^2}{4}=\pi$.
β) Το εμβαδόν του τετραγώνου είναι $\text{Ε}_\tau=4^2=16$, οπότε το εμβαδόν του γραμμοσκιασμένου χωρίου είναι: $\text{Ε}=\text{Ε}_\tau-4(\text{Α.ΘΕ})=16-4\pi=4(4-\pi)$.

5. Η ακτίνα του ημικυκλίου C_1 είναι $\rho_1=\frac{\text{ΑΒ}}{2}=\frac{6}{2}=3$ και το εμβαδόν του ισούται με
$\text{Ε}_1=\frac{\pi\cdot 3^2}{2}=\frac{9\pi}{2}$.
Η ακτίνα του ημικυκλίου C_2 είναι $\rho_2=\frac{\text{ΒΓ}}{2}=\frac{4}{2}=2$ και το εμβαδόν του ισούται με
$\text{Ε}_2=\frac{\pi\cdot 2^2}{2}=2\pi$.
Η ακτίνα του ημικυκλίου C_3 είναι $\rho_3=\frac{\text{ΑΓ}}{2}=\frac{2}{2}=1$ και το εμβαδόν του ισούται με
$\text{Ε}_3=\frac{\pi\cdot 1^2}{2}=\frac{\pi}{2}$.

Το εμβαδόν του σκιασμένου χωρίου ισούται με $\text{Ε}_1-\text{Ε}_2+\text{Ε}_3=\frac{9\pi}{2}-2\pi+\frac{\pi}{2}=3\pi$.

6. Είναι $\text{Ε}=\pi\rho^2 \Leftrightarrow 16\pi=\pi\rho^2 \Leftrightarrow \rho^2=16 \Leftrightarrow \rho=4$.
Η πλευρά τετραγώνου εγγεγραμμένου σε κύκλο με ακτίνα ρ ισούται με $\rho\sqrt{2}$. Επομένως για

$\rho = 4$ έχουμε ότι η πλευρά του τετραγώνου είναι $AB = 4\sqrt{2}$.

Το εμβαδόν του κύκλου είναι 16π, ενώ το εμβαδόν του τετραγώνου είναι $E = \left(4\sqrt{2}\right)^2 = 32$.

Επομένως το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τον κύκλο και το τετράγωνο είναι ίσο με 16π – 32.

7. $(AB\Gamma) = \frac{1}{2} B\Gamma \cdot A\Delta = \frac{1}{2} \cdot 13 \cdot 6 = 39$.

$\left(AE\Delta Z\right) = \frac{\pi R^2 \mu}{360^\circ} = \frac{\pi \cdot 6^2 \cdot 90^\circ}{360^\circ} = 9\pi$.

Το εμβαδόν του χωρίου που είναι εσωτερικά του τριγώνου ΑΒΓ και εξωτερικά του κύκλου είναι ίσο με τη διαφορά των εμβαδών του τριγώνου ΑΒΓ και του κυκλικού τομέα $AE\Delta Z$, οπότε $E = (AB\Gamma) - \left(AE\Delta Z\right) = 39 - 9\pi$.

8. Η γωνία ΑΚΔ είναι η κεντρική γωνία ω_4 του τετραγώνου ΑΒΓΔ, άρα $AK\Delta = \frac{360^\circ}{4} = 90^\circ$.

Επομένως το τρίγωνο ΑΚΔ είναι ορθογώνιο με ορθή γωνία την ΑΚΔ και υποτείνουσα την ΑΔ.

$(AK\Delta) = \frac{1}{2} K\Delta \cdot KA = \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot \rho = \frac{1}{2}\rho^2 \Leftrightarrow 4 = \frac{1}{2}\rho^2 \Leftrightarrow \rho^2 = 8 \Leftrightarrow \rho = 2\sqrt{2}$.

Το εμβαδόν του κύκλου είναι $E = \pi\rho^2 = \pi\left(\sqrt{8}\right)^2 = 8\pi$.

9. Το εμβαδόν του χωρίου X_1 θα υπολογιστεί, αν από το εμβαδόν του τετραγώνου ΑΒΓΔ αφαιρέσουμε το εμβαδόν του τεταρτοκυκλίου με κέντρο το σημείο Α και ακτίνα ΑΒ. Έχουμε $(X_1) = (AB\Gamma\Delta) - \left(A.B\Delta\right) = \alpha^2 - \frac{\pi\alpha^2}{4} = \frac{\alpha^2}{4} \cdot (4 - \pi)$.

10. Το κάθε ημικύκλιο έχει ακτίνα ρ ίση με το μισό της πλευράς του τετραγώνου, δηλαδή $\rho = \frac{2\alpha}{2} = \alpha$.

Το μήκος του κάθε ημικυκλίου είναι $\frac{1}{2} \cdot 2\pi\rho = \pi\alpha$.

Η περίμετρος της καρδιάς αποτελείται από τα δύο ημικύκλια και τις πλευρές ΑΔ και ΔΓ. Από το α) ερώτημα το κάθε ημικύκλιο έχει μήκος πα οπότε η περίμετρος θα ισούται με $\pi\alpha + \pi\alpha + 2\alpha + 2\alpha = 2\pi\alpha + 4\alpha$. Από υπόθεση έχουμε ότι η περίμετρος είναι 2π + 4, οπότε $2\pi\alpha + 4\alpha = 2\pi + 4 \Leftrightarrow (2\pi + 4)\alpha = 2\pi + 4$, άρα α = 1.

Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΒΕΖ έχουμε ΒΕ = ΒΖ = α. Εφαρμόζουμε το πυθαγόρειο θεώρημα: $EZ^2 = BE^2 + BZ^2 = 1^2 + 1^2 = 2 \Leftrightarrow EZ = \sqrt{2}$.

γ) Τα δύο ημικύκλια είναι ίσα γιατί έχουν την ίδια ακτίνα α, οπότε το άθροισμά τους θα είναι ένας κυκλικός δίσκος με ακτίνα α. Το εμβαδόν του θα είναι $(\tau) = \pi\rho^2 = \pi\alpha^2$.

Είναι $(AB\Gamma\Delta) = AB^2 = 4\alpha^2$, οπότε $\frac{(\tau)}{(AB\Gamma\Delta)} = \frac{\pi\alpha^2}{4\alpha^2} = \frac{\pi}{4} < 1$

11. Εφαρμόζουμε το Πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ, στο οποίο είναι ΑΒ = ΑΓ. Έχουμε διαδοχικά: $B\Gamma^2 = AB^2 + A\Gamma^2 \Leftrightarrow$

$(2\rho)^2 = AB^2 + AB^2 \Leftrightarrow 2AB^2 = 4\rho^2 \Leftrightarrow AB^2 = 2\rho^2 \Leftrightarrow AB = \rho\sqrt{2}$.

Το εμβαδόν (μ) του σχηματιζόμενου μηνίσκου προκύπτει αν από το εμβαδόν του ημικυκλίου διαμέτρου ΒΓ αφαιρέσουμε το εμβαδόν (τ) του κυκλικού τμήματος με χορδή ΒΓ, δηλαδή: $(\mu)=(\Delta\mathrm{B}\Gamma)-(\tau)$.

Είναι $(\Delta\mathrm{B}\Gamma)=\dfrac{\pi\Delta\Gamma^2\cdot 180^\circ}{360^\circ}=\dfrac{\pi\rho^2}{2}$ και $(\tau)=(\mathrm{AB}\Gamma)-(\mathrm{AB}\Gamma)=\dfrac{\pi\mathrm{AB}^2\cdot 90^\circ}{360^\circ}-\dfrac{1}{2}\cdot\mathrm{AB}\cdot\mathrm{A}\Gamma\Leftrightarrow$

$(\tau)=\dfrac{\pi\cdot 2\rho^2}{4}-\dfrac{1}{2}\cdot 2\rho^2=\dfrac{\pi\rho^2}{2}-\rho^2$, οπότε $(\mu)=\dfrac{\pi\rho^2}{2}-\left(\dfrac{\pi\rho^2}{2}-\rho^2\right)=\rho^2$.

12. Είναι $\mathrm{A}\Delta=\Delta\mathrm{E}=\mathrm{EB}=\dfrac{2\mathrm{R}}{3}$.

Τα ημικύκλια ΑΔ και ΒΕ έχουν ακτίνα $\rho_1=\dfrac{\mathrm{A}\Delta}{2}=\dfrac{\mathrm{R}}{3}$ και εμβαδόν

$$\varepsilon=\frac{\pi\cdot\rho_1^2\cdot 180^\circ}{360^\circ}=\frac{\pi\left(\frac{\mathrm{R}}{3}\right)^2}{2}=\frac{\pi\mathrm{R}^2}{18}.$$

Τα ημικύκλια ΑΕ και ΒΔ έχουν ακτίνα $\rho_2=\dfrac{\mathrm{AE}}{2}=\mathrm{A}\Delta=\dfrac{2\mathrm{R}}{3}$ και εμβαδόν

$$\tau=\frac{\pi\cdot\rho_2^2\cdot 180^\circ}{360^\circ}=\frac{\pi\left(\frac{2\mathrm{R}}{3}\right)^2}{2}=\frac{2\pi\mathrm{R}^2}{9}.$$

Τα ημικύκλια ΑΗΒ και ΑΖΒ έχουν ακτίνα R και εμβαδόν $\sigma=\dfrac{\pi\mathrm{R}^2}{2}$.

Οπότε, τα καμπυλόγραμμα σχήματα ΑΔΒΖ και ΒΕΑΗ έχουν εμβαδόν

$$\varepsilon_1=\varepsilon_3=\sigma+\varepsilon-\tau=\frac{\pi\mathrm{R}^2}{2}+\frac{\pi\mathrm{R}^2}{18}-\frac{2\pi\mathrm{R}^2}{9}\Leftrightarrow\varepsilon_1=\frac{9\pi\mathrm{R}^2}{18}+\frac{\pi\mathrm{R}^2}{18}-\frac{4\pi\mathrm{R}^2}{18}=\frac{6\pi\mathrm{R}^2}{18}=\frac{\pi\mathrm{R}^2}{3}.$$

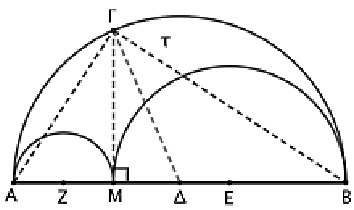
Το εμβαδόν του κύκλου με διάμετρο ΑΒ είναι $\mathrm{E}=\pi\mathrm{R}^2$. Επομένως, το καμπυλόγραμμο σχήμα ΑΔΒΕ έχει εμβαδόν $\varepsilon_2=\mathrm{E}-\varepsilon_1-\varepsilon_3=\pi\mathrm{R}^2-\dfrac{\pi\mathrm{R}^2}{3}-\dfrac{\pi\mathrm{R}^2}{3}=\dfrac{\pi\mathrm{R}^2}{3}$.

13. Το εμβαδόν E_{AE} του κύκλου (Α, r) είναι ίσο με $\mathrm{E}_{\mathrm{AE}}=\pi r^2$ και το εμβαδόν $\mathrm{E}_{\mathrm{E}\Gamma}$ του δακτυλίου μεταξύ των κύκλων (Α, r) και (Α, R) είναι ίσο με τη διαφορά των εμβαδών των δύο κύκλων, δηλαδή

$$\mathrm{E}_{\mathrm{E}\Gamma}=\pi\mathrm{R}^2-\pi r^2=\pi\left(\mathrm{R}^2-r^2\right),\ \text{άρα}\ \frac{\mathrm{E}_{\mathrm{E}\Gamma}}{\mathrm{E}_{\mathrm{AE}}}=\frac{\pi\left(\mathrm{R}^2-r^2\right)}{\pi r^2}=\frac{\mathrm{R}^2-r^2}{r^2}.$$

14. $(\mathrm{ZAM})=\dfrac{\pi\cdot\mathrm{ZM}^2\cdot 180^\circ}{360^\circ}=\dfrac{\pi\alpha^2}{2}$, $(\mathrm{EMB})=\dfrac{\pi\cdot\mathrm{EB}^2\cdot 180^\circ}{360^\circ}=\dfrac{\pi\beta^2}{2}$

και $(\Delta\mathrm{AB})=\dfrac{\pi\cdot\Delta\mathrm{B}^2\cdot 180^\circ}{360^\circ}=\dfrac{\pi(\alpha+\beta)^2}{2}$.



Για το εμβαδόν του καμπυλόγραμμου σχήματος τα, ισχύει:

$$(\tau)=(\Delta\mathrm{AB})-(\mathrm{ZAM})-(\mathrm{EMB})\Leftrightarrow(\tau)=\frac{\pi(\alpha+\beta)^2}{2}-\frac{\pi\alpha^2}{2}-\frac{\pi\beta^2}{2}\Leftrightarrow$$

$$(\tau)=\frac{\pi\left(\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2-\alpha^2-\beta^2\right)}{2}=\frac{\pi\cdot 2\alpha\beta}{2}=\pi\alpha\beta.$$